Ważne wzory

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$

2. $\int f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C$

Przykład na zastosowanie wzoru 1

a) $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$

b) $\int \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C$

Przykład na zastosowanie wzoru 2

a) $\int 2x^3\, dx = \int x^2 \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}(x^2)^2 + C = \frac{1}{2} x^4 + C$

b) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

Rozkład na ułamki proste

Jeżeli w wyrażeniu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \cdot .. \cdot (x-\lambda)$, to

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int \frac{A\, dx}{x-\alpha} + \int \frac{B\, dx}{x-\beta} + ... + \int \frac{Z\, dx}{x-\lambda}$$

Wszystkie składniki całkujemy zgodnie z wzorem $\int \frac{K\, dx}{x-\sigma} = K \ln(x-\sigma) + C$

Przykład 1

$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\, dx$

Mamy tu $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika po prawej stronie otrzymamy ostatecznie:

$2x + 3 = (A+B+C)x^2 + (A+B-C)x - 2A$

Zatem musi być spełniony układ równań
$A + B + C = 0$
$A + B - C = 2$
$-2A = 3$
Po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy:
$A = -\frac{3}{2}$

$B = \frac{5}{3}$

$C = -\frac{1}{6}$

Zatem $\int \frac{2x+3}{x^2+x^2-2x}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2} \right) dx = -\frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + C$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Każdą funkcję postaci $R(\sin x, \cos x)$ można sprowadzić do pstaci funkcji wymiernej przez podstawienie: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
Wtedy: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ (*)

Przykład 2

$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} dt = \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$

Uzasadnienie wzorów (*)

1. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

bo $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ czyli $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

2. $\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - (1-\cos^2\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2-(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

3. Ponieważ $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ więc $\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} t$ zatem $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$.
Więc po zróżniczkowaniu mamy $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Rozkład na ułamki proste

Ułamki proste to wyrażenie postaci:
I. $\frac{A}{(x-a)^n}$
II. $\frac{Mx+n}{(x^2+px+q)^n}$
gdzie x^2+px+q jest nierozkładalne nad ciałem liczb rzeczywistych (tzn. $p^2-4q<0$).

A) Ułamek prosty typu I całkujemy następująco:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{A}{(x-a)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

B) Ułamek prosty typu II całkujemy następująco:

Stosujemy podstawienie $x + \dfrac{p}{2} = z$, które redukuje mianownik $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ do postaci $z^2 + k^2$ gdzie $k^2 = q - \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$